Statystyka wielowymiarowa - ćwiczenia 5

Zadanie 11

Dla macierzy danych X rozmiaru $n \times p$ obliczono: próbkowy wektor średnich $\bar{\mathbf{x}}$ i próbkową macierz kowariancji $\mathbf{S}$. Próbkową odległością Mahalanobisa p-wymiarowych wektorów $\mathbf{y}$ i $\mathbf{w}$ nazywamy liczbę

$$d_S(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = \sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{w})^T \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{w})}.$$

1. Pokaż, że odległość Mahalanobisa jest odległością w sensie topologicznym,
2. Jaka jest interpretacja odległości, gdy $\mathbf{S}$ jest macierzą przekątniową i gdy jest macierzą jednostkową?
3. Pokaż, że wiersze macierzy X (jaka jest ich interpretacja?) leżą na powierzchni sfery Mahalanobisa o środku w punkcie $\bar{\mathbf{x}}$ i promieniu $\sqrt{(n-1)\,p}$

Zadanie 12

p-wymiarowy rozkład normalny X o wartości oczekiwanej μ ma macierz kowariancji postaci

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie Σ_{ii} jest p_i- wymiarową macierzą kwadratową dla (i=1,2).

1. Pokaż, że macierze Σ_{ii} są symetryczne, nieosobliwe i dodatnio określone,
2. Wektor X jest postaci
$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix},$$
gdzie X_i są p_i-wymiarowymi niezależnymi wektorami losowymi normalnymi o macierzach kowariancji Σ_{ii} ,
3. Wyraź EX_i za pomocą wartości oczekiwanej μ oraz macierzy Σ_{ii}.
4. Pokaż, że
$$d^2_{\Sigma}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) = d^2_{\Sigma_{11}}(\mathbf{y_1}, \mathbf{w_1}) + d^2_{\Sigma_{22}}(\mathbf{y_2}, \mathbf{w_2}),$$
gdzie $\mathbf{y_1}, \mathbf{w_1}$są pierwszymi $p_1$współrzędnymi wektorów $\mathbf{y}$ i $\mathbf{w}$, zaś $\mathbf{y_2}, \mathbf{w_2}$są kolejnymi $p_2$współrzędnymi wektorów $\mathbf{y}$ i $\mathbf{w}$.

Zadanie 13

p-wymiarowy rozkład normalny X o wartości oczekiwanej μ ma macierz kowariancji Σ. Niech

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix},$$

gdzie X_i jest p_i- wymiarowym wektorem, Σ_{ii} jest p_i- wymiarową macierzą kwadratową dla (i=1,2). Oznaczmy przez $X_{2.1}$ wektor losowy

$$X_{2.1} = X_2 - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}X_1$$

1. Pokaż, że wektory X_1, X_2, $X_{2.1}$ mają rozkłady normalne.
2. Oblicz ich wartości oczekiwane i macierze kowariancji.
3. Pokaż, że wektory X_1 i $X_{2.1}$ są niezależne.